Niveaubestimmende Aufgabe zum Fachlehrplan

Mathematik Gymnasium

„Funktionen“

(Schuljahrgang 10)

(Arbeitsstand: 07.07.2016)

Niveaubestimmende Aufgaben sind Bestandteil des Lehrplankonzeptes für das Gymnasium und das Fachgymnasium. Die nachfolgende Aufgabe soll Grundlage unterrichtlicher Erprobung sein. Rückmeldungen, Hinweise, Anregungen und Vorschläge zur Weiterentwicklung der Aufgabe senden Sie bitte über die Eingabemaske (Bildungsserver) oder direkt an petra.behling@lisa.mb.sachsen-anhalt.de

An der Erarbeitung der niveaubestimmenden Aufgabe haben mitgewirkt:

Petra Behling	Halle (Leitung der Fachgruppe)
Thomas Brill	Schulpforte
Uta Fliegner-Hoppstock	Osterburg
Antje Noack	Halberstadt
Udo Piper	Wittenberg

Herausgeber im Auftrag des Ministeriums für Bildung des Landes Sachsen-Anhalt:
Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung
Sachsen-Anhalt
Riebeckplatz 09
06110 Halle

Aufgabe: „Funktionen“

1. Gegeben sind in ihrem jeweils größtmöglichen Definitionsbereich die Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 mit ihren Graphen G_1, G_2, G_3 und G_4 durch die Gleichungen:

$y = f_1(x) = 2 \cdot \sin(x - \frac{\pi}{2})$ $y = f_2(x) = -(x+1)^3 - 8$

$y = f_3(x) = \frac{1}{x-5} + 3$ $y = f_4(x) = \sqrt{4x-8}$

a) Untersuchen Sie die Funktion f_1 auf Nullstellen und geben Sie ihren Wertebereich an. Zeichnen Sie den Graphen G_1 im Intervall $[-\pi; 4\pi]$.

Weisen Sie unter Verwendung der Beziehung

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

nach, dass für alle $x \in R$ gilt: $f_1(x + 2\pi) = f_1(x)$ und schlussfolgern Sie daraus auf eine besondere Eigenschaft der Funktion f_1.

b) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f_2 und geben Sie die Monotonie der Funktion f_2 an.

Maik beschreibt folgendermaßen, wie der Graph G_2 aus dem Graphen der Funktion g mit $y = g(x) = x^3$ hervorgeht: „Der Graph der Funktion g wird um eine Einheit in Richtung der negativen x-Achse und um acht Einheiten in Richtung der negativen y-Achse verschoben, anschließend wird an der x-Achse gespiegelt.“

Begründen Sie, dass diese Vorgehensweise nicht zum Graphen G_2 führt und geben Sie eine Gleichung der Funktion an, deren Graph nach Maik's Beschreibung aus dem Graphen von g entsteht.

c) Beschreiben Sie mit Ihren eigenen Worten den Begriff „Asymptote“ und geben Sie Gleichungen der Asymptoten des Graphen G_3 an.
Skizzieren Sie den Graphen G_3 in einem geeigneten Intervall.

Der Graph G_3 weist eine Symmetrieeigenschaft auf. Entscheiden Sie, welches der folgenden Symmetriezentren für den Graphen G_3 zutrifft und begründen Sie.

☐	☐	☐	☐	☐
y-Achse	Koordinaten-ursprung	Gerade mit x = 5	Punkt P(5 | 3)	Punkt P(–5 | 3)

Geben Sie eine Gleichung für den Nachweis dieser Symmetrie an.

d) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f_4.
Zeigen Sie, dass der Graph G_4 mit der Geraden h mit der Gleichung $y = h(x) = \frac{1}{2}x + 1$ genau einen Punkt gemeinsam hat und berechnen Sie dessen Koordinaten.
Charakterisieren Sie die spezielle Lage der Geraden h zum Graphen G_4.

2. Für die Finanzierung ihrer Ausbildung legen Maria's Eltern zu ihrer Geburt einen festverzinslichen Sparbrief über 10 000,00 Euro an. Der Zinssatz beträgt 2,5 %.

a) Begründen Sie, dass sich das Guthaben G in Euro nach t Jahren ($t \in R,\ t \geq 0$) durch eine Funktion mit der Gleichung $y = G(t) = 10000 \cdot 1{,}025^t$ beschreiben lässt.

Berechnen Sie die Guthaben G zu den Zeitpunkten t = 2, t = 5,5 und t = 18.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion G im Intervall [0; 18] in ein Koordinatensystem und beschreiben Sie die Veränderung des Graphen bei Variation des Startguthabens sowie des Zinssatzes.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Umkehrfunktion t(G) und weisen Sie nach, dass auch $y = t(G) = \frac{\lg G - 4}{\lg 1{,}025}$ eine Gleichung dieser Umkehrfunktion ist.

Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion t an.
Charakterisieren Sie die gegenseitige Lage der Graphen der Funktionen G und t.
Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine Aufgabenstellung, die mithilfe der Funktion t(G) gelöst werden kann.

Mit einem Startguthaben von 9700 Euro sowie einer jährlichen Rate von 320 Euro will sich auch Maria's Großmutter am Ausbildungsfond beteiligen, allerdings spart sie das Geld zu Hause in ihrem Kopfkissen.

c) Geben Sie eine Gleichung der Funktion G_1 an, die das Guthaben (in Euro) dieser Anlage in Abhängigkeit der Zeit t (t in Jahren) beschreibt und vergleichen Sie die beiden Funktionen G und G_1 unter mathematischen Gesichtspunkten.

d) Berechnen Sie die Zeitpunkte t, für die der gemeinsame Ausbildungsfond für Maria zu gleichen Teilen von ihren Eltern und ihrer Großmutter stammt.

Eine Kombination aus beiden Anlagemöglichkeiten ist ein sogenannter „Ratensparvertrag", hierbei werden regelmäßig Einzahlungen von R Euro pro Jahr getätigt und das aktuelle Kapital jeweils mit konstantem Zinssatz p verzinst.

e) Die Entwicklung eines Guthabens soll beispielhaft für eine Rate von R = 1000,00 Euro sowie einen Zinssatz von p = 2,5 % mithilfe einer Tabellenkalkulation berechnet werden.

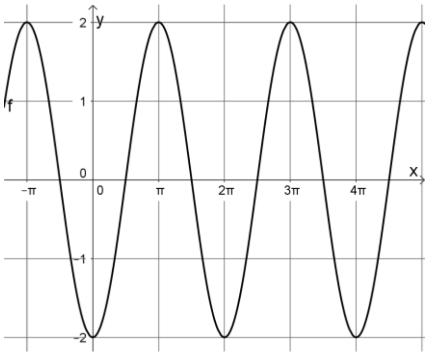
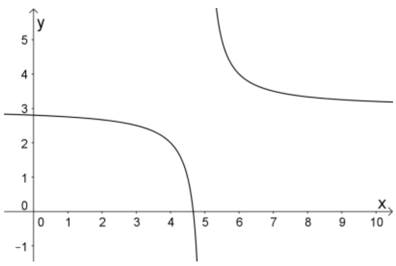
Geben Sie die Befehle in den Zellen B7 bis D7 an und übertragen Sie die Tabelle in ein eigenes Tabellenkalkulationsprogramm.

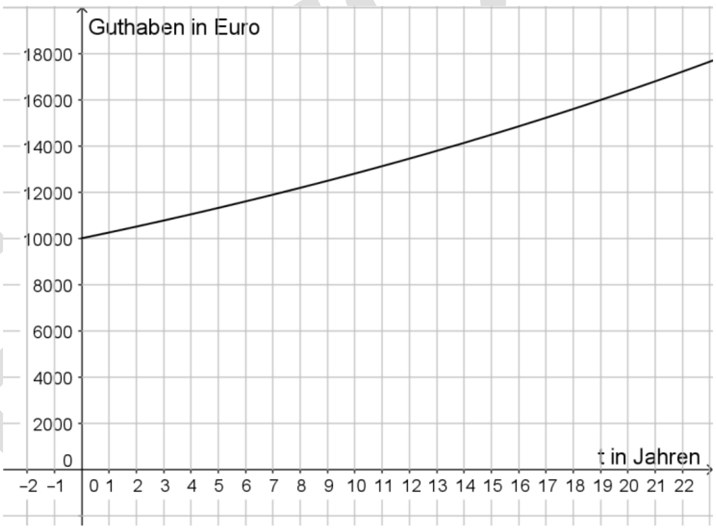
Stellen Sie die Entwicklung des Guthabens in den ersten 18 Jahren dar.

	A	B	C	D
1	Rate R [in €]:	1000,00		
2	Zinssatz:	2,50%		
3				
4				
5	Jahr	Kapital K [in €]	Zinsen [in €]	Guthaben [in €]
6	1	1000,00	25,00	1025,00
7	2	2025,00	50,63	2075,63
8	3	3075,63	76,89	3152,52
9	4	4152,52	103,81	4256,33
10	5	5256,33	131,41	5387,74

Ermitteln Sie jeweils einen Term zur Berechnung des Kapitals am Beginn des 3. Jahres, am Beginn des 4. Jahres und zu Beginn eines Jahres t ($t \in R,\ t \geq 0$).

Erwarteter Stand der Kompetenzentwicklung

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
1a	Untersuchen und Angeben, z. B.: $0 = 2 \cdot \sin(x - \frac{\pi}{2})$; $x_{0,k} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in Z$ $W = [-2\,;\,2]$	x	x	
	Zeichnen, z. B.: 	x		
	Nachweisen, z. B.: $f_1(x + 2\pi) = 2\sin\left(x + 2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)$ $= 2\left[\sin x \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \cos x \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right]$ $= -2\cos x = -2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2\sin\left(-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$ $= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f_1(x)$			x
	Schlussfolgern, z. B.: f_1: periodisch mit $p = 2\pi$			x
1b	Berechnen und Angeben, z. B.: $0 = -(x+1)^3 - 8$; $x_0 = -3$ f_2 : monoton fallend		x	
	Begründen und Angeben, z. B.: Wird zuletzt gespiegelt, dann nicht an der x-Achse, sondern an der Geraden mit der Gleichung $y = -8$. $y = v(x) = -(x+1)^3 + 8$		x	
1c	Beschreiben und Angeben, z. B.: Eine Asymptote ist eine Kurve, der sich der Graph beliebig annähert. y = 3 und x = 5	x	x	
	Skizzieren, z. B.: 		x	

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
	Entscheiden, Begründen und Entwickeln, z. B.: Symmetriezentrum: Punkt P(5 | 3) Der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Der Graph G_3 geht aus diesem durch Verschiebung um 5 Einheiten in Richtung der positiven x-Achse und um 3 Einheiten in Richtung der positiven y-Achse hervor. $3 - f_3(5 - x) = f_3(5 + x) - 3$			x
1d	Ermitteln, z. B.: $4x - 8 \geq 0$ $D_4 = [2; +\infty)$		x	
	Zeigen und Berechnen, z. B.: $f_4(x) = h(x)$, $x_S = 6$ einzige Lösung, S(6 | 4)		x	
	Charakterisieren, z. B.: Die Gerade h ist die Tangente an G_4 im Punkt S.			x
2a	Begründen, z. B.: exponentielles Wachstum mit Anfangswert G(0) = 10000 und Wachstumsfaktor $a = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}025$		x	
	Berechnen, z. B.: G(2) = 10506,25 €, G(5,5) = 11454,64 € und G(18) = 15596,59 €	x		
	Zeichnen, z. B.:  	x		
	Beschreiben, z. B.: Der Graph von G verschieben sich mit änderndem G_0 in Richtung der y-Achse und Veränderungen von p wirken sich auf den Anstieg aus, d. h. der Graph wird „flacher“ oder „steiler“.		x	

<table>
<tr><th>Aufg.</th><th>Hinweise zur Lösung</th><th>AFB I</th><th>AFB II</th><th>AFB III</th></tr>
<tr><td>2b</td><td>Ermitteln und Nachweisen, z. B.:
$t(G)=\log_{1{,}025}\frac{G}{10000}$
$\log_{1{,}025}\frac{G}{10000}=\frac{\lg\frac{G}{10000}}{\lg 1{,}025}=\frac{\lg G-\lg 10000}{\lg 1{,}025}=\frac{\lg G-4}{\lg 1{,}025}$</td><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Angeben und Charakterisieren, z. B.:
$D=[10.000;\,+\infty)$
Die Graphen von G und t liegen spiegelsymmetrisch bezüglich der Geraden mit y = x.</td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Formulieren, z. B.:
Zu welchem Zeitpunkt t hat die Anlage ein Guthaben bestimmter Höhe?</td><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>2c</td><td>Angeben und Vergleichen, z. B.:
$y=G_1(t)=320\cdot t+9700$
G : exponentielles Wachstum, Zuwächse werden größer
G_1: lineares Wachstum, Zuwächse konstant
Gemeinsamkeiten: monoton wachsend</td><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>2d</td><td>Berechnen, z. B.:
$G(t) = G_1(t)$; $t_1 \approx 5{,}4$ Jahre ; $t_2 \approx 15{,}4$ Jahre</td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2e</td><td>Angeben und Darstellen, z. B.:
B7:=D6+B1; C7:=B7*B2; D7:=SUMME(B7:C7)
<table>
<tr><th>Jahr</th><th>Kapital K [in €]</th><th>Zinsen [in €]</th><th>Guthaben [in €]</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1000,00</td><td>25,00</td><td>1025,00</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2025,00</td><td>50,63</td><td>2075,63</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3075,63</td><td>76,89</td><td>3152,52</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4152,52</td><td>103,81</td><td>4256,33</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5256,33</td><td>131,41</td><td>5387,74</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6387,74</td><td>159,69</td><td>6547,43</td></tr>
<tr><td>7</td><td>7547,43</td><td>188,69</td><td>7736,12</td></tr>
<tr><td>8</td><td>8736,12</td><td>218,40</td><td>8954,52</td></tr>
<tr><td>9</td><td>9954,52</td><td>248,86</td><td>10203,38</td></tr>
<tr><td>10</td><td>11203,38</td><td>280,08</td><td>11483,47</td></tr>
<tr><td>11</td><td>12483,47</td><td>312,09</td><td>12795,55</td></tr>
<tr><td>12</td><td>13795,55</td><td>344,89</td><td>14140,44</td></tr>
<tr><td>13</td><td>15140,44</td><td>378,51</td><td>15518,95</td></tr>
<tr><td>14</td><td>16518,95</td><td>412,97</td><td>16931,93</td></tr>
<tr><td>15</td><td>17931,93</td><td>448,30</td><td>18380,22</td></tr>
<tr><td>16</td><td>19380,22</td><td>484,51</td><td>19864,73</td></tr>
<tr><td>17</td><td>20864,73</td><td>521,62</td><td>21386,35</td></tr>
<tr><td>18</td><td>22386,35</td><td>559,66</td><td>22946,01</td></tr>
</table></td><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Ermitteln, z. B.:
K(1) = 1000
K(2) = K(1) · 1,025 + 1000 = 1000 · 1,025 + 1000 = 1000 · (1,025 + 1)
K(3) = K(2) · 1,025 + 1000
= (1000 · (1,025 + 1)) · 1,025 +1000 = 1000 · ($1{,}025^2$ + 1,025 + 1)

K(4) = K(3) · 1,025 + 1000 = ... = 1000 · ($1{,}025^3$ + $1{,}025^2$ + 1,025 + 1)
$=1000\cdot\sum_{n=1}^{4}1{,}025^{n-1}$
$K(t)=1000\cdot\sum_{n=1}^{t}1{,}025^{n-1}$</td><td></td><td></td><td>x</td></tr>
</table>

Anregungen und Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz

Die Aufgabe zielt auf die Ausbildung vielfältiger Kompetenzen im Umgang mit Funktionen ab, die insbesondere zur Bewältigung von Anforderungen in den Kompetenzschwerpunkten des Inhaltsbereiches „Zuordnungen und Funktionen“ der Qualifikationsphase erforderlich sind. Die Schülerinnen und Schüler sollen einerseits einen Überblick elementarer Funktionsklassen mit ihren spezifischen Eigenschaften gewinnen und andererseits durch Verallgemeinerungen Synergieeffekte erkennen und verwenden. Darüber hinaus sollen die Schülerinnen und Schüler Funktionen als geeignete Modelle für verschiedene, auch außermathematische Sachverhalte nutzen lernen.

Die Bearbeitung der Aufgabe bietet sich als Abschluss der Arbeit in diesem Kompetenzschwerpunkt an, da zu diesem Zeitpunkt alle inhaltsbezogenen Kompetenzen entwickelt sein müssten. Eine Reflexion der in Aufgabe 2 thematisierten Strategien zur Vermögensbildung anhand der Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler dient dabei der Vermittlung der Grunderfahrung, Probleme des alltäglichen Lebens mit Mitteln der Mathematik zu lösen und zu beurteilen.

Aufgrund des Umfangs sowie der inneren Abgeschlossenheit der einzelnen Aufgabenteile bietet sich eine Bearbeitung in verschiedenen Arbeits- bzw. Sozialformen an. Durch bestimmte Formen von Gruppenarbeit (z. B. Gruppenpuzzle) üben sich die Schülerinnen und Schüler im Argumentieren und Kommunizieren und durch die Lehrkräfte können gezielt Maßnahmen der Differenzierung getroffen werden.

<u>Anmerkungen zum Einsatz digitaler Werkzeuge</u>

1. Die Kennzeichnung des Hilfsmittels mit „CAS“ meint nicht „Computer-Algebra-Systeme“ im engeren Sinne, sondern wird synonym für digitale Lernwerkzeuge, sogenannte Multi-Repräsentationssysteme, verwendet. Diese zeichnen sich durch die gleichzeitige Verfügbarkeit der unterschiedlichen Tools und damit durch die Möglichkeit der Vernetzung, z. B. durch graphische, numerische und algebraische Darstellungsweisen aus.
2. Die durch die Schülerinnen und Schüler zu entwickelnden Lösungen sind grundsätzlich unabhängig vom verwendeten Hilfsmittel (Taschenrechner, CAS, herkömmliche Tabellen, etc.) mathematisch korrekt und nachvollziehbar darzustellen.

Aufgabe: „Funktionen“

Art der Aufgabe	Hilfsmittel	Arbeitszeit	Schuljahrgang
Lernaufgabe	Aufgabe 1: WTR Aufgabe 2: CAS	90 min	10

Einordnung in den Fachlehrplan

Kompetenzschwerpunkte

Funktionsklassen

zu entwickelnde mathematische Kompetenzen

- Exponential- und Winkelfunktionen grafisch darstellen
- Eigenschaften von Potenz- und Wurzelfunktionen sowie von Exponential- und Logarithmusfunktionen ermitteln und beschreiben sowie Zusammenhänge unter dem Aspekt von zueinander inversen Funktionen herstellen
- Eigenschaften von Winkelfunktionen ermitteln und beschreiben
- Einfluss von Parametern auf die Lage und Form der Graphen von Funktionen untersuchen und beschreiben
- einfache Wurzel- und Exponentialgleichungen lösen
- Wachstumsprozesse untersuchen sowie lineares und exponentielles Wachstum erkennen
- verschiedene Typen von Funktionen erkennen und in unterschiedlichen Sachsituationen anwenden

Bezug zu grundlegenden Wissensbeständen

- Potenzfunktionen mit $y = f(x) = x^n$, $n \in Z$ und ihre Eigenschaften (auch Asymptoten)
- zueinander inverse Funktionen
- Wurzelfunktionen mit $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $n \geq 2$ und ihre Eigenschaften
- Exponentialfunktionen mit $y = f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$
- Winkelfunktionen $y = f(x) = \sin x$, und ihre Eigenschaften (auch Periodizität)
- Einfluss von Parametern auf Lage und Form der Graphen der o. g. Funktionen $y = g(x) = a \cdot f(x + b) + c$
- Wurzel- und Exponentialgleichungen

Einordnung in das Kompetenzmodell

Aufg.	inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				allgemeine mathematische Kompetenzen				AFB		
	$a^2=5m^2$				P	M	A	D	I	II	III
1a			x		3			3	x	x	
1b			x		5		3			x	
1c			x			1	1			x	
1d			x		2, 3					x	x
2a			x			2		2	x	x	
2b			x		3	4			x	x	
2c			x			1				x	
2d	x				3, 6				x		
2e	x		x		4, 6	1				x	x