Niveaubestimmende Aufgabe zum Fachlehrplan

Mathematik Gymnasium

„Diskrete Zufallsgrößen“

(Schuljahrgang 10)

(Arbeitsstand: 16.08.2019)

Niveaubestimmende Aufgaben sind Bestandteil des Lehrplankonzeptes für das Gymnasium und das Berufliche Gymnasium. Die nachfolgende Aufgabe soll Grundlage unterrichtlicher Erprobung sein. Rückmeldungen, Hinweise, Anregungen und Vorschläge zur Weiterentwicklung der Aufgabe senden Sie bitte an lisa-niveaubestimmende-aufgaben@sachsen-anhalt.de

An der Erarbeitung der niveaubestimmenden Aufgabe haben mitgewirkt:

Petra Behling	Halle (Leitung der Fachgruppe)
Thomas Brill	Schulpforte
Uta Fliegner-Hoppstock	Osterburg
Antje Noack	Halberstadt
Udo Piper	Wittenberg

Herausgeber im Auftrag des Ministeriums für Bildung des Landes Sachsen-Anhalt:
Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung
Sachsen-Anhalt
Riebeckplatz 09
06110 Halle

Aufgabe „Diskrete Zufallsgrößen“

1. Begründen Sie jeweils, dass es sich um eine diskrete Zufallsgröße handelt und geben Sie zwei weitere Beispiele für diskrete Zufallsgrößen an.

   X: Anzahl der Besucher eines Schwimmbades

   Y: Schuhgröße 15-jähriger Jungen

2. In einer Jugendherberge sollen die Preise für bestimmte Gerichte neu kalkuliert werden. Dafür hat man die von 200 Gästen getroffene Auswahl der Gerichte über einen längeren Zeitraum beobachtet. Die Tabelle zeigt das Ergebnis der Beobachtung sowie die infrage kommenden Preiskalkulationen.

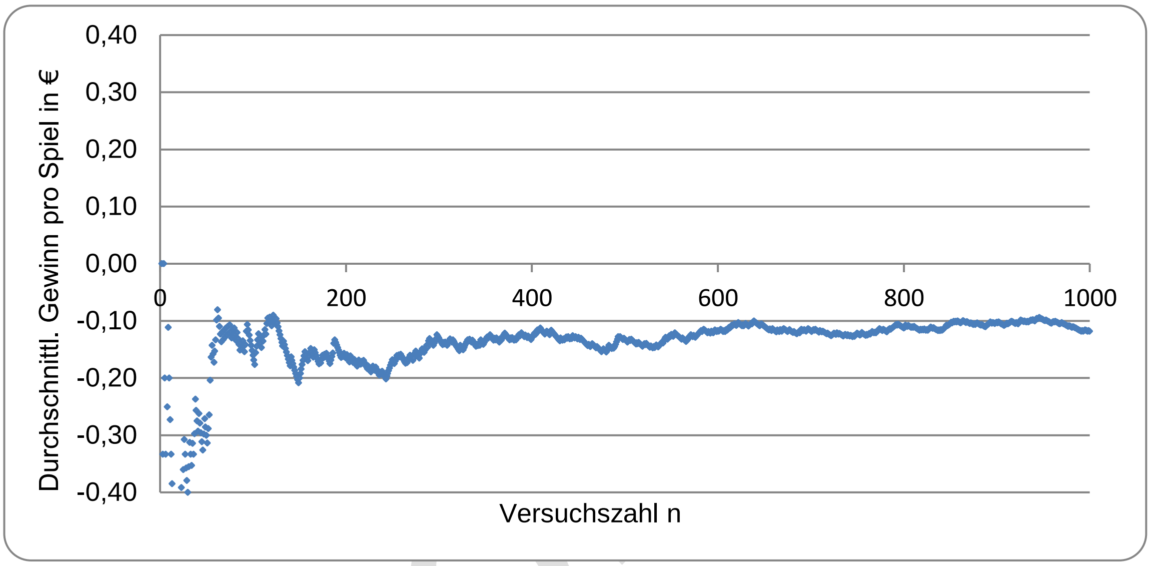
Gericht	Anzahl der gewählten Gerichte	Preiskalkulation 1 (Preis je Gericht)	Preiskalkulation 2 (Preis je Gericht)
Gemüseauflauf	30	4,00 €	4,10 €
Salatteller mit Brot	20	3,00 €	3,40 €
Fleischgericht	50	7,00 €	6,10 €
Suppe	34	3,00 €	3,40 €
Nudelpfanne	44	4,00 €	4,10 €
Fischgericht	22	6,00 €	6,70 €

a) Die Zufallsgröße X_1 beschreibt die Preise für das jeweilige Gericht entsprechend der Preiskalkulation 1; die Zufallsgröße X_2 die Preise für das jeweilige Gericht entsprechend der Preiskalkulation 2.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen X_1 und X_2.

b) Vergleichen Sie die Erwartungswerte und Standardabweichungen der Zufallsgrößen X_1 und X_2 und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
Schlussfolgern Sie daraus, welche Preiskalkulation auch bei Abweichung vom erfassten Auswahlverhalten der Gäste die geeignetere ist.

3. Ein unter dem Namen „chuck a luck“ bekanntes Würfelspiel besteht darin, dass ein Spieler zunächst 1 € auf eine der Augenzahlen 1 bis 6 setzt. Anschließend würfelt er mit drei idealen Würfeln. Zeigt kein Würfel die gesetzte Augenzahl, so verliert der Spieler seinen Einsatz. Zeigen ein, zwei oder drei Würfel die gesetzte Augenzahl, so erhält der Spieler seinen Einsatz zurück und außerdem einen, zwei oder drei Euro dazu.
Die Zufallsgröße X gibt den Gewinn in Euro bei diesem Würfelspiel an.

a) Im Diagramm ist eine Auswertung des Würfelspiels dargestellt.



Interpretieren Sie das Diagramm.

b) Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X die Werte -1, 1, 2 und 3 annehmen kann und ermitteln Sie die in der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X angegebenen Wahrscheinlichkeiten p_2 und p_3.

x	-1	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	p_2	p_3

c) Interpretieren Sie die folgende Aussage im Sachzusammenhang.
„Die Gleichung $-\frac{125}{216}+\frac{75}{216}+2\cdot p_2+a\cdot p_3=0$ ist für $a=20$ erfüllt.“

Erwarteter Stand der Kompetenzentwicklung

<table>
<tr><th>Aufg.</th><th>Hinweise zur Lösung</th><th>AFB I</th><th>AFB II</th><th>AFB III</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Begründen und Angeben, z. B.:

X, Y sind diskrete Zufallsgrößen, denn die Werte der Zufallsgrößen sind jeweils nur endlich viele Einzelwerte.

Z: Anzahl roter Ampeln beim Überqueren von zehn Ampelkreuzungen
W: Betrag der Differenz der Augenzahlen beim Würfeln mit Hexaedern</td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2a)</td><td>Ermitteln, z. B.:
<table>
<tr><td>$X_1 = k$</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>$P(X_1 = k)$</td><td>$\frac{54}{200} = 0{,}27$</td><td>$\frac{74}{200} = 0{,}37$</td><td>$\frac{22}{200} = 0{,}11$</td><td>$\frac{50}{200} = 0{,}25$</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$X_2 = k$</td><td>3,40</td><td>4,10</td><td>6,10</td><td>6,70</td></tr>
<tr><td>$P(X_2 = k)$</td><td>$\frac{54}{200} = 0{,}27$</td><td>$\frac{74}{200} = 0{,}37$</td><td>$\frac{50}{200} = 0{,}25$</td><td>$\frac{22}{200} = 0{,}11$</td></tr>
</table></td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2b)</td><td>Vergleichen, z. B.:
$E(X_1) = 4{,}70$; $\sigma(X_1) \approx 1{,}57$; $E(X_2) \approx 4{,}70$; $\sigma(X_2) \approx 1{,}23$
Die Erwartungswerte der Zufallsgrößen sind etwa gleich, während die Standardabweichung der Zufallsgröße X_2 kleiner als die der Zufallsgröße X_1 ist.</td><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Deuten, z. B.:
Die durchschnittlichen Preise pro Gericht sind bei beiden Preiskalkulationen nahezu gleich. Die Abweichungen der Preise vom durchschnittlichen Preis sind bei der Preiskalkulation 2 kleiner, da die Streuung der Werte der Zufallsgröße um den Erwartungswert geringer ist.</td><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Schlussfolgern, z. B.:
Somit kann es bei einer größeren Abweichung von der zugrunde liegenden Auswahl der Gerichte durch die Gäste bei der Preiskalkulation 1 zu größeren Verlusten kommen als bei der Preiskalkulation 2. Die Preiskalkulation 2 erscheint daher geeigneter.</td><td></td><td></td><td>x</td></tr>
</table>

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
3a)	Interpretieren, z. B.: Das Diagramm stellt den durchschnittlichen Gewinn pro Spiel in Abhängigkeit von der Anzahl der Spiele (Versuche) dar. Bei weniger als 200 Spielen schwankt der durchschnittliche Gewinn pro Spiel stark zwischen $-0{,}40$ € und $-0{,}08$ €. Bei größerer Anzahl der Spiele, etwa ab 400, stabilisiert sich der Wert des durchschnittlichen Gewinns. Er liegt etwa bei $-0{,}11$ €, d. h. dass ein Spieler bei häufigem Spiel im Durchschnitt 11 Cent pro Spiel verliert.		x	
3b)	Begründen und Ermitteln, z. B.: Der Gewinn ergibt sich aus der Differenz des Einsatzes und der jeweiligen Auszahlung. Als Auszahlungen kommen folgende Beträge infrage: 0 €, 2 €; 3 € und 4 €. Unter Berücksichtigung des Einsatzes von 1 € je Spiel ergeben sich für die Zufallsgröße X die Werte $-1, 1, 2$ und 3. $p_3 = P(X=3) = (\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216}$ $p_2 = P(X=2) = 1 - P(X=-1) - P(X=1) - P(X=3)$ $p_2 = \frac{15}{216}$		x	
3c)	Interpretieren, z. B.: Mit der Gleichung wird der Erwartungswert der Zufallsgröße X berechnet. Dieser nimmt für a = 20 den Wert 0 an, d. h. würde der Gewinn beim dreifachen Erscheinen der gesetzten Zahl 20 € betragen, dann kann das Spiel als fair bezeichnet werden. Auf lange Sicht wäre weder mit Gewinn noch mit Verlust zu rechnen.			x

Anregungen und Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz

Im Kompetenzschwerpunkt „Zufallsgrößen“ der Einführungsphase werden wichtige Grundbegriffe definiert und deren Bedeutung für außermathematische Sachzusammenhänge erläutert. Die zu entwickelnden inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen stellen eine wichtige Voraussetzung für das Verständnis der Inhalte der Kompetenzschwerpunkte der Stochastik in der Qualifikationsphase dar.

Der Aufgabenkomplex ist so konzipiert, dass eine umfassende Überprüfung der erworbenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen im Zusammenhang mit einer Vielfalt an allgemeinen mathematischen Kompetenzen unter Berücksichtigung aller drei Anforderungsbereiche erfolgt. Die Lernerfolgskontrolle enthält keine Zuweisung von Bewertungseinheiten. Sie zielt darauf ab, den Lernenden und den Lehrkräften Rückmeldung über die Verfügbarkeit der geforderten mathematischen Kompetenzen zu gegeben. Bei einer Ergebniskontrolle durch einen Schüler oder eine Schülerin eröffnet sich die Möglichkeit, vor allem an der Entwicklung der allgemeinen mathematischen Kompetenz „Argumentieren und Kommunizieren“ zu arbeiten, indem die Beteiligten sich über die entwickelten Lösungswege und Argumentationen austauschen.

Diese Aufgabe kann auch genutzt werden, um in der Qualifikationsphase vor der Behandlung der Kompetenzschwerpunkte der Stochastik das erforderliche Wissen zu reaktivieren.

<u>Anmerkungen zum Einsatz digitaler Werkzeuge</u>

1. Die Kennzeichnung des Hilfsmittels mit „CAS“ meint nicht „Computer-Algebra-Systeme“ im engeren Sinne, sondern wird synonym für digitale Lernwerkzeuge, sogenannte Multi-Repräsentationssysteme, verwendet. Diese zeichnen sich durch die gleichzeitige Verfügbarkeit der unterschiedlichen Tools und damit durch die Möglichkeit der Vernetzung, z. B. durch graphische, numerische und algebraische Darstellungsweisen aus.
2. Die durch die Schülerinnen und Schüler zu entwickelnden Lösungen sind grundsätzlich unabhängig vom verwendeten Hilfsmittel (Taschenrechner, CAS, herkömmliche Tabellen, etc.) mathematisch korrekt und nachvollziehbar darzustellen.

Aufgabe „Zufallsgrößen“

Art der Aufgabe	Hilfsmittel	Arbeitszeit	Schuljahrgang
Lernerfolgskontrolle	WTR/CAS	30 min	10

Einordnung in den Fachlehrplan

<u>Kompetenzschwerpunkt</u>

Zufallsgrößen

<u>zu entwickelnde mathematische Kompetenzen</u>

– Ereignisse von Zufallsversuchen mithilfe von Zufallsgrößen beschreiben
– Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsgrößen ermitteln und damit Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen berechnen
– Erwartungswerte und Standardabweichungen von Zufallsgrößen berechnen und interpretieren
– inner- und außermathematische Anwendungsaufgaben

<u>Bezug zu grundlegenden Wissensbeständen</u>

– diskrete Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilung
– Punkt- und Intervallwahrscheinlichkeiten
– Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Einordnung in das Kompetenzmodell

Teilaufgabe	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereiche		
	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1	I		I				x		
2a		I		I	I		x		
2b			III		II				x
3a				II				x	
3b		I		I	I			x	
3c	III					III			x