

Niveaubestimmende Aufgaben – Mathematik – Schuljahrgang 10:

Hängebrücke

1. Einordnung der Aufgabe in den Fachlehrplan

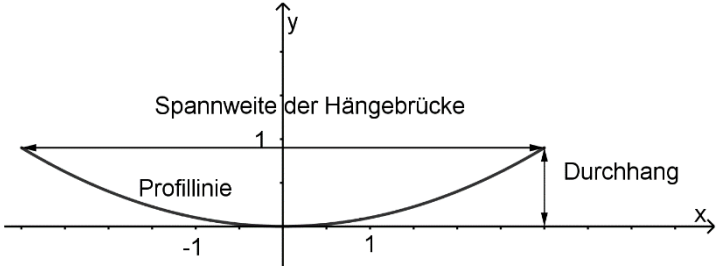
| Art der Aufgabe | Inhaltsbereich | Hilfsmittel | Arbeitszeit |
|-----------------|---|-------------|-------------|
| Prüfungsaufgabe |  | WTR | 30 min |

| Kompetenzschwerpunkte: Quadratische Gleichungen, quadratische Funktionen und Sinusfunktion |
|--|
| zu entwickelnde mathematische Kompetenzen: <ul style="list-style-type: none"> – Eigenschaften quadratischer Funktionen am Beispiel beschreiben – Einfluss von Parametern auf Form der Graphen von Funktionen untersuchen und beschreiben |
| Bezug zu grundlegenden Wissensbeständen: <ul style="list-style-type: none"> – Argument, Funktionswert – Intervall – Quadratische Funktion, Parabel, Scheitelpunkt – Funktionsgleichung des Typs $y = ax^2$ |

2. Einordnung der Aufgabe ins Kompetenzmodell

| Aufg. | Kompetenz | allgemeine mathematische Kompetenzen | | | |
|-------|--|--------------------------------------|----------|----------|----------|
| | | P | M | A | D |
| a) | – quadratische Funktionen in außermathematischen Zusammenhängen anwenden | | 4 | | |
| b) | – Eigenschaften quadratischer Funktionen sachbezogen anwenden | 3 | 2 | | |
| c) | – Graphen im Koordinatensystem interpretieren | | | | 2 |
| d) | – Gleichung lösen | 3 | 4 | | 4 |

3. Erwartungsbild zur WTR-Aufgabe

| Aufg. | Hinweise zur Lösung | AFB I | AFB II | AFB III |
|-------|--|-------|--------|---------|
| a) | Beschreiben, z. B.: $f(0)$ beschreibt die tiefste Stelle der Hängebrücke | | 1 | |
| b) | Ermitteln, z. B.: $f(3) = 0,9$, d.h. der Durchhang beträgt ca. 90 cm | | | 2 |
| c) |  <p>Ergänzen, z. B.:</p> | | 2 | |
| d) | Ermitteln, z. B.: $0,5 = a \cdot (-2,5)^2$, $a = 0,08$ | | | 2 |

4. Didaktischer Kommentar

Exemplarisch illustriert diese Prüfungsaufgabe eine einfache Modellierung eines realen Sachverhalts. Eine erfolgreiche Bearbeitung setzt voraus, dass die Eigenschaften quadratischer Funktionen sowie zugehörige Untersuchungsmethoden bekannt sind. Zudem erfordert die Aufgabe eine „Übersetzungsleistung“.

Die Eigenschaften der Funktion müssen aus dem Aufgabentext erkannt und zugeordnet werden. Hilfreich kann dabei eine vergleichende Darstellung wie z. B. die folgende sein.


| Beschreibung der Realität | mathematisches Modell |
|------------------------------------|--|
| Profillinie | Parabel |
| Durchhang | Differenz aus größtem und kleinstem Funktionswert der quadratischen Funktion |
| Spannweite | Entfernung der größten Funktionswerte/ Intervallenden |
| tiefste Stelle über dem Untergrund | kleinster Funktionswert der quadratischen Funktion |

Betrachtet man Schülerlösungen, so wird deutlich, dass gerade diese Übersetzung besonders schwerfällt.

5. Schülerlösungen zu Teilaufgabe a)

| Schülerlösung 1 | Schülerlösung 2 | Schülerlösung 3 |
|--|--|---|
| „Die tiefste Stelle der Hängebrücke ist $f(x) = 0,1 \cdot 0^2$.“ | „Die tiefste Stelle ist im Koordinatenursprung. Somit hängt die Brücke am tiefsten Punkt 0 Meter hoch.“ | „Die tiefste Stelle ist 0, da die tiefste Stelle im Koordinatenursprung liegt.“ |
| <u>Fehler:</u> Die Hängebrücke (Realität) wird mit dem Modell $f(0)$ gleichgesetzt. | <u>Fehler:</u> Die Hängebrücke (Realität) wird mit dem Modell $f(0)$ gleichgesetzt. Eine kritische Reflexion der Modellierung erfolgt nicht. | <u>Fehler:</u> Die Hängebrücke (Realität) wird mit dem Modell $f(0)$ gleichgesetzt. Der Koordinatenursprung wird nicht als Punkt dargestellt. |

6. Aufgabenvariationen

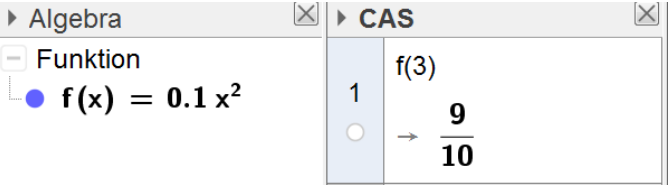
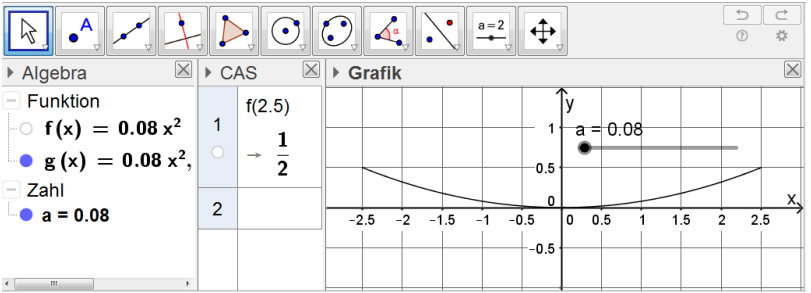
| Art der Aufgabe | Inhaltsbereich | Hilfsmittel | Arbeitszeit |
|-----------------|---|-------------|-------------|
| Prüfungsaufgabe |  | DMW | 30 min |

7. Didaktischer Kommentar

Die Aufgabenstellung bleibt unverändert. Als Hilfsmittel sind jetzt digitale Mathematikwerkzeuge zugelassen. Das Signalwort „Ermitteln“ ermöglicht eine freie Wahl des Vorgehens, d. h. hier kann die Lösung mithilfe des DMW auch grafisch bestimmt werden. So lässt sich gesuchte Parameter in Teilaufgabe d) mithilfe des Schiebereglers bestimmen. Dies setzt aber voraus, dass die Beschreibung der Realität durch das mathematische Modell sicher beherrscht wird. Nicht mehr erforderlich ist das händische Berechnen der Funktionswerte. Dies leistet das DMW im CAS-Fenster.

8. Ein- und Ausgabe des DMW und Lösungsdarstellung

Die nachfolgende Übersicht zeigt, wie die Lösungen der Teilaufgaben b) und d) mithilfe eines DMW ermittelt werden können. Die Spalte „Ein- und Ausgabe mit DMW“ stellt keine Dokumentation der Lösung, wie sie beispielsweise in einer Prüfung erwartet würde, dar. Eine solche Dokumentation wird in der Spalte „Dokumentation der Lösung“ gezeigt.

| Aufg. | Ein- und Ausgabe mit DMW | Dokumentation der Lösung |
|-------|--|---|
| b) |  | Ermitteln, z. B.: $f(3) = 0,9$, d.h. der Durchhang beträgt ca. 90 cm |
| d) |  | Ermitteln, z. B.: $a = 0,08$, da $0,5 = 0,08 \cdot (-2,5)^2$ gilt oder: $\begin{aligned} 0,5 &= a \cdot 2,5^2 / : 2,5^2 \\ 0,5 : 6,25 &= a \\ a &= 0,08 \end{aligned}$ |

Auch hier zeigen Schülerlösungen, dass es auf das Verständnis der Modellierung ankommt. Im Folgenden sind zwei fehlerhafte Schülerlösung abgebildet.

9. Schülerlösung 1 zur Teilaufgabe b)

b) GTR: $y = 0,1 x^2$ zeichnen lassen \rightarrow Analyse \rightarrow
 Grafische Lösung \rightarrow x/y-Berechnen
 \rightarrow y Berechnen \rightarrow Wert x (6) eingeben
 \rightarrow (6 | 3,6)

$y = 3,6$

10. Schülerlösung 2 zur Teilaufgabe d)

Aufgabe (d):

geg: GTR \rightarrow Grafik & Tabelle \rightarrow Funktionsgleichung
probieren \leftarrow

Ansatz: $y = a \cdot x^2$ ges: a

Lsg: $y = 0,5 x^2$ \rightarrow von 0,5 abwärts
Zahlen probieren

Endergebniss: $a = 0,2 m$

Erkennbar in beiden Schülerlösungen ist, dass der Umgang mit dem DMW, hier ein grafikfähiger Taschenrechner, durchaus beherrscht wird. Aber es fehlt jegliches Verständnis für die Modellierung.

11. Schülerlösung 3 zur Teilaufgabe d)

| | |
|---|--|
| <p><u>geg:</u> Spannweite = 5m Durchgang = 0,5m Funktion = $y = a \cdot x^2$</p> <p><u>ges:</u> a</p> <p><u>Lsg:</u> <u>$y = 0,08 \cdot x^2$</u> \Rightarrow GTR verwendet</p> | <p>Diese korrekte Schülerlösung zeigt ein Problem auf, dass bei der Verwendung von DMW an Bedeutung gewinnt. Wie soll die Lösungsdarstellung erfolgen? Der Informationsgehalt der hier dargestellten Lösung ist relativ gering, denn es zeigt nur, dass das Werkzeug verwendet wurde.</p> <p>Es ist nicht sinnvoll, dies zu dokumentieren.</p> <p>Daher kann auf diese Notation verzichtet werden.</p> |
|---|--|